

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
математической физики и
информационных технологий



С.А. Переселков
28.06.2023г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.11.03 Линейная алгебра

1. Код и наименование направления подготовки/специальности:

14.03.02 Ядерная физика и технологии.

2. Профиль подготовки/специализация: Физика атомного ядра и частиц.

3. Квалификация выпускника: бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: 0803 кафедра математической физики и информационных технологий.

6. Составители программы: Деревягина Елена Ивановна, кандидат физикоматематических наук, доцент.

7. Рекомендована: НМС физического факультета, протокол №6 от 27.06.2023г.
продлена НМС физического факультета, протокол №6 от 26.06.24.

8. Учебный год: 2024/2025 Семестр(ы): 2

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- овладение начальными знаниями по линейной алгебре, необходимыми для изучения других дисциплин специальности,
- знакомство студентов с основными понятиями и методами линейной алгебры; - формирование у студентов научного математического мышления, умения применять математический аппарат для исследования физических процессов;
- формирование у обучающихся определенного состава компетенций (результатов освоения) для подготовки к профессиональной деятельности.

Основная задача учебной дисциплины: формирование всесторонних знаний об основах линейной алгебры. В курсе данной дисциплины студенты овладевают знаниями по таким разделам линейной алгебры, как линейные пространства и операторы, алгебра матриц, системы линейных уравнений.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина (модуль) «Линейная алгебра» относится к базовой части модуля общепрофессиональных дисциплин учебного плана ООП.

Предшествующие дисциплины:

1. «Аналитическая геометрия» (Б1.О.11.02);

Дисциплины, которым предшествует данная дисциплина:

1. «Векторный и тензорный анализ» (Б1.О.11.04);
2. «Дифференциальные уравнения» (Б1.О.11.05).

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

| Код | Название компетенции | Код(ы) | Индикатор(ы) | Планируемые результаты обучения |
|------|--|---------|--|---|
| ОПК1 | Способен применять базовые знания в области физикоматематических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности | ОПК-1.1 | Владеет знаниями фундаментальных разделов математики. | Знает математический язык для выражения одной из самых общих естественнонаучных идей идеи линейности в совокупности целостной системы научных знаний об окружающем мире. |
| | | ОПК-1.2 | Создает и применяет математические модели в своей практической деятельности. | Умеет использовать аппарат линейной алгебры при изучении последующих математических, физических курсов и в программировании, для научного познания и творчества; - оценивать численные значения величин, |

| | | | | |
|--|--|---------|--|---|
| | | | | характерных для различных разделов естествознания. |
| | | ОПК-1.3 | Умеет оценивать границы применимости используемых математических моделей при решении типовых профессиональных задач. | Использует положения, законы и методы естественных наук для решения инженерных задач в сфере профессиональной деятельности. |

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. — 4/144.

Форма промежуточной аттестации(зачет/экзамен) экзамен.

13. Виды учебной работы:

| Вид учебной работы | Трудоемкость | |
|--|--------------|--------------|
| | Всего | По семестрам |
| | | 2 семестр |
| Аудиторные занятия | 64 | 64 |
| в том числе: лекции | 32 | 32 |
| практические | 32 | 32 |
| Самостоятельная работа | 44 | 44 |
| Форма промежуточной аттестации (зачет – 0 час. / экзамен 0 час.) | 36 | 36 |
| Итого: | 144 | 144 |

13.1. Содержание дисциплины:

| п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела дисциплины | Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК * |
|-----|---------------------------------|-------------------------------|--|
| | | | |

1. Лекции

| | | | |
|-----|--|--|--|
| 1.1 | Матричная алгебра. Системы линейных уравнений. | Арифметическое n -мерное пространство. Матрицы. Операции над матрицами. Определители n -го порядка. Системы, решаемые по правилу Крамера. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Методы вычисления ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений для однородной системы линейных уравнений. Структура общего решения для неоднородной системы линейных уравнений. Метод Гаусса. | |
| 1.2 | Линейные пространства. | Линейные пространства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Базис в линейном пространстве. Матричная форма разложения по базису. Матрица перехода к новому базису. Формулы преобразования координат при изменении базиса. Подпространства линейного пространства, линейные многообразия. Линейная оболочка системы векторов. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств. Евклидовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Ортонормированный базис. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. | |
| 1.3 | Линейные операторы. | Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Произведение линейных операторов. Алгебра операторов. Матрица суммы, произведения на число и произведения линейных операторов. Обратный оператор. Ядро и образ линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. | |
| 1.4 | Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением. | Сопряженный оператор, его свойства. Матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе. Самосопряженные операторы, унитарные операторы. Приведение матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду. | |
| 1.5 | Билинейные и квадратичные формы. | Линейные формы. Сопряженное пространство. Двойственный базис. Билинейные формы. Вид билинейной формы в фиксированном базисе. Переход к новому базису. невырожденные, симметричные и положительно определенные билинейные формы. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому | |

| | | | |
|--------------------------------|---|---|--|
| | | виду методом Лагранжа и методом собственных векторов. | |
| 2. Практические занятия | | | |
| 2.1 | Матричная алгебра. Решение систем линейных уравнений. | Операции над матрицами. Определители n-го порядка. Обратная матрица. Ранг матрицы. Решение однородных и неоднородных систем по методу Гаусса. | |
| 2.2 | Линейные пространства. | Примеры линейных пространств. Базис в линейном пространстве. Матрица перехода. Формулы изменения координат вектора при изменении базиса. | |
| 2.3 | Линейные операторы. | Примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора в базисе. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Нахождение собственных чисел и собственных векторов линейных операторов. | |
| | | Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. | |
| 2.4 | Квадратичные формы. | Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и методом собственных векторов. | |

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

| № п/п | Наименование темы (раздела) дисциплины | Виды занятий (часов) | | | |
|-------|--|----------------------|--------------|------------------------|-------|
| | | Лекции | Практическое | Самостоятельная работа | Всего |
| 1 | Матричная алгебра. Системы линейных уравнений. | 8 | 12 | 14 | 34 |
| 2 | Линейные пространства. | 8 | 8 | 10 | 26 |
| 3 | Линейные операторы. | 8 | 6 | 8 | 22 |
| 4 | Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением. | 4 | 2 | 4 | 10 |
| 5 | Билинейные и квадратичные формы. | 4 | 4 | 8 | 16 |
| | Итого: | 32 | 32 | 44 | 108 |

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Работа с конспектами лекций, чтение литературы по предмету; решение задач по курсу в течение семестра.

Самостоятельная работа студентов в течение семестра включает следующие формы работы и виды контроля:

- подготовка к практическим занятиям; при подготовке к практическим занятиям необходимо проработать теоретические вопросы занятия с использованием материала лекций и рекомендуемой литературы, подробно разобрать примеры решения задач, разобранных на лекциях, выполнить домашние задания по данной теме;

- подготовка к коллоквиуму по лекционному курсу; при подготовке к коллоквиуму по лекционному курсу необходимо проработать теоретические вопросы данного модуля с использованием материала лекций и рекомендуемой литературы, подробно разобрать примеры, разобранные на лекциях, выполнить домашние задания по данному модулю;

Показателем успешной текущей работы студента является еженедельное выполнение заданий на практических занятиях. Методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по курсу включает:

- Конспект лекций;
- Основную литературу;
- Дополнительную литературу.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет,

необходимых для освоения дисциплины (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

| № п/п | Источник |
|-------|--|
| 1 | Проскураков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: Учебное пособие. – 14-е изд., стер./ И.В. Проскураков. – СПб: Лань. 2019. – 476 с. |
| 2 | А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. Линейная алгебра. – 5-е изд. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. -336 с. |
| 3 | Попов В.С. Линейная алгебра. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. -256 с. |
| 4 | Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия - 6-е изд., сер. Университетский учебник. - М: МГУ, 2014. - 280 с. |

б) дополнительная литература:

| № п/п | Источник |
|-------|---|
| 1 | Шмидт Р.А. Алгебра. 4: Задачник-практикум - СПб: Изд. Санкт-Петербургского Гос. Ун-та, 2016. - 184 с. |

| | |
|---|---|
| 2 | Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия - 3-е изд., перераб. и доп. - М: Проспект, 2014. - 400 с. |
|---|---|

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

| № п/п | Ресурс |
|-------|--|
| 1. | www.lib.vsu.ru – ЗНБ ВГУ |
| 2. | http://e.lanbook.com/ - ЭБС «Лань» |
| 3. | http://www.book.ru/ - ЭБС «Book.ru» |

* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электроннообразовательные ресурсы

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы.

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки настоящей рабочей программы, особое внимание уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

Студентам рекомендуется получить в библиотеке учебную литературу по дисциплине, необходимую для эффективной работы на всех видах аудиторных занятий, а также для самостоятельной работы по изучению дисциплины.

Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости) 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

(при использовании лабораторного оборудования указывать полный перечень, при большом количестве оборудования можно вынести данный раздел в приложение к рабочей программе) Лекционная аудитория.

19. Фонд оценочных средств:

| № п/п | Наименование раздела дисциплины (модуля) | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства |
|-------|--|----------------|-------------------------------------|--------------------|
| 1. | Разделы 1-5 Разделы 1-4 | ОПК-1 | ОПК-1.1 | Контрольные работы |

| | | | | |
|--|--|--|---------|---|
| | | | ОПК-1.2 | Контрольные работы |
| | | | ОПК-1.3 | Контрольные работы |
| Промежуточная аттестация форма контроля — экзамен | | | | Перечень вопросов Практическое задание |

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Оценка знаний, умений и навыков, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в соответствии с Положением о текущей аттестации обучающихся по программам высшего образования Воронежского государственного университета. Текущая аттестация проводится в форме письменных контрольных работ. Критерии оценивания приведены выше.

Промежуточная аттестация проводится в соответствии с Положением о промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Контрольно-измерительные материалы промежуточной аттестации включают в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний и практические задания, позволяющие оценить степень сформированности умений и навыков, и опыт деятельности.

20.2 Перечень вопросов к экзамену.

1. Арифметическое пространство R^n .
2. Матрицы. Операции над матрицами. Ассоциативность умножения матриц. Квадратные матрицы.
3. Определители n-го порядка. Алгебраические дополнения и миноры. Свойства определителей. Определитель Вандермонда.
4. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условие существования, единственность, формула для вычисления обратной матрицы.
5. Различные формы записи систем линейных уравнений. Системы, решаемые по правилу Крамера.
6. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.
7. Методы вычисления ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
8. Фундаментальная система решений для однородной системы линейных уравнений. Структура общего решения для неоднородной системы линейных уравнений.

9. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
10. Линейные пространства. Определение, примеры. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис в линейном пространстве.
11. Теоремы о базисе. Размерность пространства. Примеры конечномерных и бесконечномерных пространств.
12. Матричная форма разложения по базису. Матрица перехода к новому базису. Формулы преобразования координат при изменении базиса.
13. Подпространства линейного пространства, линейные многообразия. Примеры. Линейная оболочка системы векторов. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств.
14. Евклидовы пространства. Примеры. Неравенство Коши-Буняковского. Норма вектора, угол между векторами, ортогональные векторы.
15. Ортонормированный базис в евклидовом пространстве. Проекция вектора. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
16. Линейные операторы. Примеры. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
17. Ядро и образ линейного оператора. Дефект и ранг линейного оператора.
18. Сумма линейных операторов, произведение линейного оператора на число, произведение линейных операторов. Обратный оператор и условия его существования.
19. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
20. Сопряженный оператор, его свойства. Самосопряженные операторы. Унитарные операторы. Приведение матрицы самосопряженного оператора к диагональному виду.
21. Билинейные формы. Вид билинейной формы в фиксированном базисе. Переход к новому базису.
22. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

20.3 Перечень практических заданий.

1. Решить систему методом Гаусса, указать общее решение и одно частное:

$$\begin{array}{rclclcl}
2x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 1 \\
x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & -2x_5 & = & 0 \\
3x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -3x_4 & +4x_5 & = & 2 \\
4x_1 & +5x_2 & -5x_3 & -5x_4 & +7x_5 & = & 3
\end{array}$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}
1 & -3 & 0 & -2 \\
-4 & 3 & 3 & -2 \\
-1 & 1 & -2 & -3 \\
3 & -2 & 2 & 8
\end{vmatrix}$$

3. Найти фундаментальную систему решений. Указать общее решение:

$$\begin{array}{rclclcl}
x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & 0 \\
3x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -4x_4 & = & 0 \\
4x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = & 0 \\
3x_1 & +8x_2 & +24x_3 & -19x_4 & = & 0
\end{array}$$

4. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix}
1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\
2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\
-2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\
6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1
\end{pmatrix}.$$

5. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Найти значение матричного многочлена

$$\begin{array}{l}
f(A) = 2x^5 - x^2 - 3x + 4, \\
A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

7. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix}
9 & 7 & 6 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$$

8. Применяя процесс ортогонализации, постройте ортонормированный базис:

$$\bar{e}_1 = (1, 2, 2, -1)^T, \bar{e}_2 = (1, 1, -5, 3)^T, \bar{e}_3 = (3, 2, 8, -7)^T.$$

9. Проверить, образуют ли многочлены

$$f_1 = 1 + t + t^2, \quad f_2 = 1 + t + 2t^2, \quad f_3 = 1 + 2t + 3t^2.$$

базис в пространстве многочленов степени не выше двух. Найти координаты многочлена $f = -2 + 2t + 6t^2$

в этом базисе.

10. Проверить, образуют ли следующие матрицы базис в пространстве квадратных матриц второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.

Написать матрицу оператора $A: V^3 \rightarrow V^3$, $A\bar{x} = (\bar{e}, \bar{x})\bar{e}$, где

$$\bar{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k},$$

в базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$.

12.

Проверить, что оператор $A: V^3 \rightarrow V^3$, заданный формулой $A\bar{x} = [\bar{a}, \bar{x}]$, является линейным. В случае $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ написать матрицу оператора A в базисе $\mathcal{B} = (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$. (Квадратные скобки означают векторное произведение.)

13.

Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.

Показать, что каждая из двух систем векторов образует базис в R^3 и найти матрицу перехода:

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (1, 2, -1), & \bar{e}_2 &= (-2, 1, 2), & \bar{e}_3 &= (4, 1, -3); \\ \bar{e}'_1 &= (2, 1, -1), & \bar{e}'_2 &= (0, 2, -3), & \bar{e}'_3 &= (1, 1, -5). \end{aligned}$$

15.

Дана матрица линейного оператора A в базисе $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти ее матрицу в базисе B : $\bar{e}'_1 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$.

При оценивании используются количественные и качественные шкалы оценок.

| Критерии оценивания компетенций | Уровень сформированности компетенций | Шкала оценок |
|---|--------------------------------------|---------------------|
| Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. | Повышенный уровень | Отлично |
| Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач. | Базовый уровень | Хорошо |
| Обучающийся частично владеет понятийным аппаратом и теоретическими основами дисциплины, способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач данной дисциплины. Допускает ошибки при решении этих задач. | Пороговый уровень | Удовлетворительно |
| Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трем (четырем) из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные, фрагментарные знания, допускает грубые ошибки. | – | Неудовлетворительно |

ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЙ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Направление/специальность 14.03.02 Ядерные физика и технологии

Дисциплина Б1.О.11.03 Линейная алгебра.

Профиль подготовки Физика атомного ядра и частиц

Форма обучения очная

Учебный год 2023/2024

Ответственный исполнитель

Заведующий кафедрой
математической
физики и информационных
технологий
28.06.2023



технологий Переселков С.А.

Исполнители

Доцент кафедры математической физики и информационных технологий
_____ Деревягина Е.И. 28.06.2023

СОГЛАСОВАНО

Куратор ООП

по направлению/специальности _____ 2023
подпись *расшифровка подписи*

Начальник отдела обслуживания ЗНБ _____ 2023 *подпись*
расшифровка подписи

Программа рекомендована Научно-методическим советом физического факультета,
протокол №6 от 27.06.2023г.